Различные подходы изучения темы «Интеграл и его приложение»
в школьных учебниках математики

Анализ школьных учебников алгебры и начала анализа 10-11 класса, на предмет изучения понятий интеграла и его приложения.

В настоящее время в Федеральный комплект учебников рекомендуемых к использованию следующие учебники: Колягин Ю.М., Ткачёва МВ., Фёдорова Н.Н «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия», Атанасян Л.С, Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия», Муравин Г.К., Муравина О.В. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень)», Шарыгин И.Ф «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (базовый уровень)» и т.д. Остановимся на учебниках: Колмогорова А.Н. «Алгебра и начала анализа», Мордоковича А.Г. «Алгебра и начала анализа. 10-11 класс», Башмакова М.И. «Алгебра и начала анализа» Никольского С.М. «Алгебра и начала анализа», Виленкина Н.Я. «Алгебра и математический анализ.11 класс», Алимова Ш.А. «Алгебра и начала анализа».

При изучении вопроса понятия интеграла используют два основных подхода: интеграл как предел интегральных сумм и интеграл как приращение первообразной.

Подходы к изучению вопроса «Интеграл и его приложения»

Интеграл как предел интегральных сумм

Колмогоров А.Н.
«Алгебра и начала анализа»
Мордокович А.Г.
«Алгебра и начала анализа. 10-11 класс»
Башмакова М.И.
«Алгебра и начала анализа»
Никольский С.М
«Алгебра и начала анализа»
Виленкин Н.Я
«Алгебра и математический анализ.
11 класс»

Интеграл как приращение первообразной

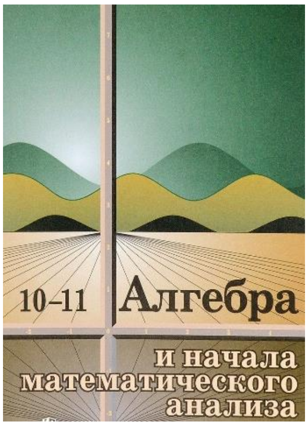
Алимов Ш.А.
«Алгебра и начала анализа»

Рассмотрим эти подходы более подробнее.

1. Интеграл как предел интегральных сумм.

Этот подход реализован в учебниках авторов Колмогорова А.Н. «Алгебра и начала анализа», Мордоковича А.Г. «Алгебра и начала анализа. 10-11 класс», Башмакова М.И. «Алгебра и начала анализа» Никольского С.М «Алгебра и начала анализа», Виленкина Н.Я «Алгебра и математический анализ.11 класс». Он предполагает, что введение операции интегрирования как независимая операция, при том что сам интеграл определяется как предел последовательности, который составлен из интегральных сумм.

Идея этого метода наглядно демонстрирует геометрический смысл интеграла с помощью нахождения площади криволинейной трапеции. Благодаря этому совместно с определением понятия интеграла получается и способ его вычисления. Для вычисления интеграла в при данном подходе используют формулу Ньютона-Лейбница, которая доказывается.



Так в учебнике Колмогорова А.Н. «Алгебра и начала анализа. 10-11 класс» [1, с.179-193] сначала рассматривается введение интеграла с помощью задачи о вычисление площади криволинейной трапеции «Пусть на отрезке *[a,b]* оси *Ox* задана непрерывная функция *f*, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком *[a,b]* и

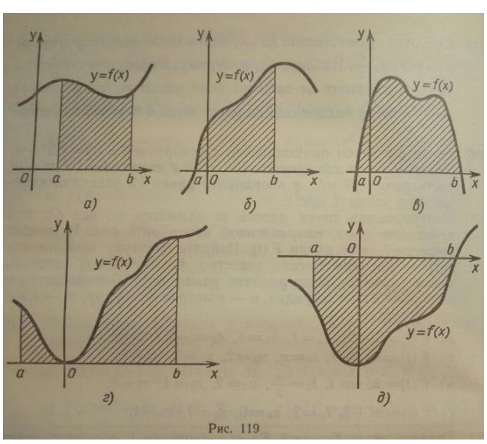


Рис. 119

прямые *x=a, x=b* (рис.119), называют *криволинейной трапецией*. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 119, *а-д»* [1,с.179]. Решение этой задачи рассматривается с помощью теоремы площади криволинейной трапеции «Если *f* – непрерывная и неотрицательная на отрезке *[a,b]* функция, а *F*- ее первообразная на этом отрезке, то площадь *S* соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке *[a,b]* , т.е *S=F(b)-F(a)»* [1,с.180], где площадь трапеции равна приращению первообразной на данном отрезке, и с помощью интегральных сумм, когда трапеция разбивается на прямоугольники, а их сумма равна площади данной трапеции [1,с.184]. Дальше вводится определение интеграла, формулы для вычисления объемов «Пусть задано тело объемом *V*, причем имеется такая прямая, что какую бы плоскость *S* сечения тела этой плоскостью. На плоскость, перпендикулярная оси *Ox*, пересекает ее в некоторой точке *x*. Следовательно, каждому числу *x* поставлено соответствие единственное число *S(x)* - площадь сечения тела этой плоскостью. Тем самым на отрезке *[a,b]* задана функция *S(x).* Если функция *S* непрерывная на отрезке *[a,b]*, то справедлива формула $V=\int_a^b S(x)dx.$» [1, с.188] и формулы решения физических задач работа переменной силы «Пусть точка движется по оси *Ox* под действием силы, проекция которой на ось *Ox* есть функция *f* от *x*. При этом будем предполагать, что *f* есть непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась. Покажем, что в этом случае работа подсчитывается по формуле $A=\int_a^b f(x)dx$» [1,с. 190] и центр масс « Координата x' центра масс системы материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, расположенных на прямой в точках с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ находится по формуле $x'=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+....+m_nx_n}{m_1+m_2+...+m_n}$» [1,с. 191].Данные формулы вводятся методом интегральных сумм. Для самостоятельного решения предлагаются различные задачи для нахождения: кинетической энергии стержня «Однородный стержень длиной *l*=20 см вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. Угловая скорость вращения $\omega=10\pi\, c^{-1}$.

Площадь поперечного сечения стержня $S=4\ см^2$, плотность материала, из которого изготовлен стержень, равна $\rho = 7{,}8$ г/см^3 . Найдите кинетическую энергию стержня» [1, с.193], центр масс «Найти центр масс однородного прямоугольного кругового конуса» [1, с.193], работы «Найдите работу против силы выталкивания при погружении шара в воду» [1, с.193], а так же задачи на рассмотренные в учебнике формулы (объем тела, растягивания пружины). В учебнике представлены прикладные задачи физической направленности, которые делятся на несколько уровней сложностей.

В учебнике Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа.10-11 класс» [2,с.209-230]. Для введения понятия «интеграл» рассматриваться задачи, приводящие к понятию определенного интеграла: о вычисление площади криволинейной трапеции «В декартовой прямоугольной системе координат xOy дана фигура, ограниченная осью x, прямыми $x=a$, $x=b$ ($a<b$) и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a,b]$, функции $y = f(x)$: назовем эту фигуру *криволинейной трапецией*» [2, с.218], о вычисление массы стержня «Дан прямолинейный неоднородный стержень, плотность в точке x вычисляется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найти массу стержня» [2,с. 219], о перемещения точки «По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v = v(t)$. Найти перемещение точки за промежуток времени $[a,b]$» [2, с. 220]. Все эти задачи автором приведены с целью того, что учащиеся поняли: все три задачи сводятся к одной математической модели и решение многих таких различных задач из разных областей науки и техники сводятся к одной модели. Следующим своим шагом в изучении темы, автор дает описание математической модели [2, с. 219-220], которая построена на предыдущих трех задачах для непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$:

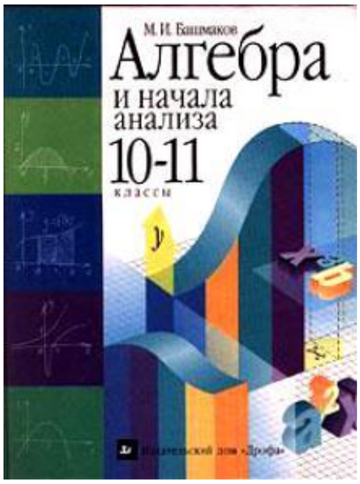
1. разбивают отрезок $[a;b]$ на n равных частей;

2. составляют сумме

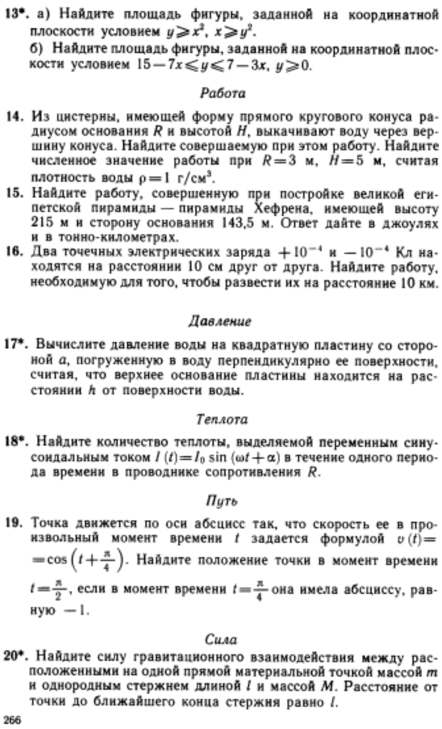
$$s_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_k)\Delta x_k + \dots f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

3. вычисляют предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Автор разъясняет, что данным предел существует и он доказывается в курсе математического анализа в вузе [2, с. 221]. Его называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и дается его обозначение [2, 221]. В учебнике даются задачи, которые приводят к прямому вычислению интеграла. В данном учебнике автор не предлагает задачи для самостоятельной работы учащихся, эту «задачу» он возлагает на преподавателя.



В учебнике Башмакова М.И. «Алгебра и начала анализа» тема «Интеграл и его применение» [3, с.231-260] выделена в отдельную главу. Автор дает определение интеграла, «пусть дана положительная функция $f(x)$ определенная на конечном отрезке $[a;b]$ называется площадь ее подграфика» [3,с.232].



13*. а) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием $y \geqslant x^2$, $x \geqslant y^2$.
б) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием $15-7x \leqslant y \leqslant 7-3x$, $y \geqslant 0$.

Работа

14. Из цистерны, имеющей форму прямого кругового конуса радиусом основания R и высотой H, выкачивают воду через вершину конуса. Найдите совершаемую при этом работу. Найдите численное значение работы при $R=3$ м, $H=5$ м, считая плотность воды $\rho=1$ г/см^3.

15. Найдите работу, совершенную при постройке великой египетской пирамиды — пирамиды Хефрена, имеющей высоту 215 м и сторону основания 143,5 м. Ответ дайте в джоулях и в тонно-километрах.

16. Два точечных электрических заряда $+10^{-4}$ и -10^{-4} Кл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Найдите работу, необходимую для того, чтобы развести их на расстояние 10 км.

Давление

17*. Вычислите давление воды на квадратную пластину со стороной a, погруженную в воду перпендикулярно ее поверхности, считая, что верхнее основание пластины находится на расстоянии h от поверхности воды.

Теплота

18*. Найдите количество теплоты, выделяемой переменным синусоидальным током $I(t)=I_0 \sin(\omega t+\alpha)$ в течение одного периода времени в проводнике сопротивления R.

Путь

19. Точка движется по оси абсцисс так, что скорость ее в произвольный момент времени t задается формулой $v(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$. Найдите положение точки в момент времени $t=\frac{\pi}{2}$, если в момент времени $t=\frac{\pi}{4}$ она имела абсциссу, равную -1.

Сила

20*. Найдите силу гравитационного взаимодействия между расположенными на одной прямой материальной точкой массой m и однородным стержнем длиной l и массой M. Расстояние от точки до ближайшего конца стержня равно l.

266

Объясняется способ вычисления этой площади, с помощью интегральных сумм. Исходя из этого делается вывод, что интеграл равен пределу интегральных сумм. [3, с. 234] Данный метод отражается в задачах о нахождении объема лимона и работы по перемещению точки.

В учебнике рассмотрено большое число задач на применение интеграла в физике: задачи о работе силы, перемещение точки, вычисление масс стержня, электрического заряда и нахождение давления воды на плотине приводятся вместе с их теоретическими выводами. Однако для самостоятельного решения в данном учебнике мало задач, как и прикладных.

В учебнике Никольского С.М. «Алгебра и начала анализа» [4, с.167-206] рассмотрение задачи о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к понятию интегральных сумм и приделу от них, после чего вводится определение определенного интеграла.

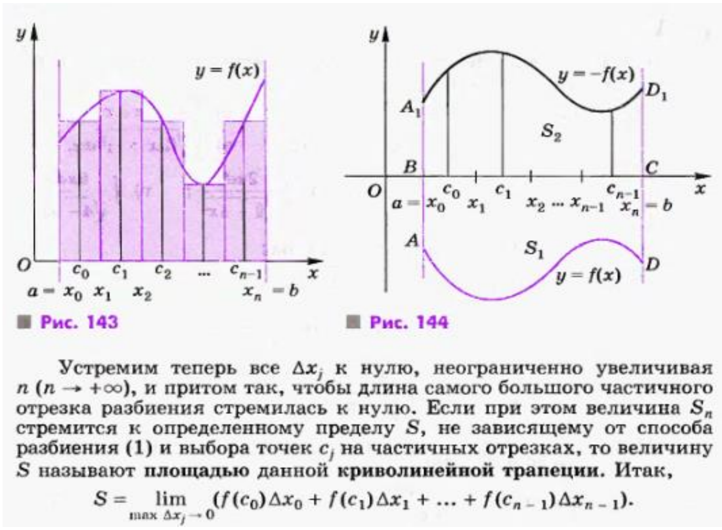


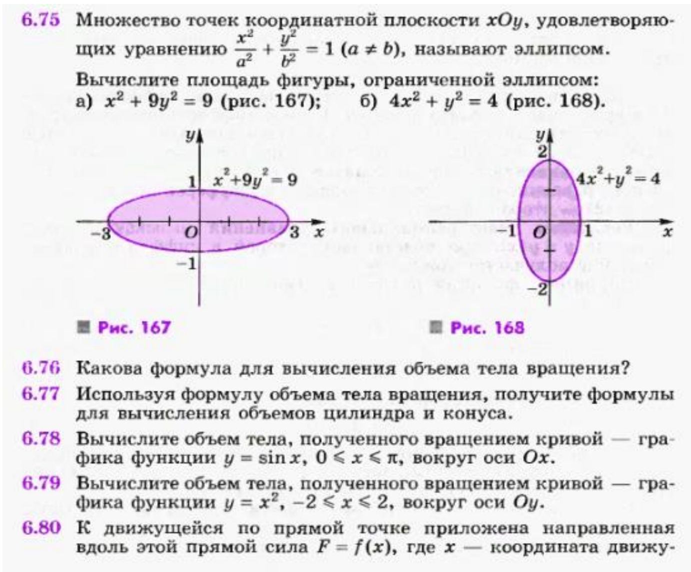
Рис. 143

Рис. 144

Устремим теперь все Δx_j к нулю, неограниченно увеличивая n ($n \to +\infty$), и притом так, чтобы длина самого большого частичного отрезка разбиения стремилась к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способа разбиения (1) и выбора точек c_j на частичных отрезках, то величину S называют **площадью данной криволинейной трапеции**. Итак,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} (f(c_0)\Delta x_0 + f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_{n-1})\Delta x_{n-1}).$$

Теоретическое обоснование применения определенного интеграла рассматривается в таких физических задачах, как задачи на работу силы, работу электрического заряда, на вычисление массы стержня переменной плотности, давления жидкости на стенку и центра тяжести. Так же рассматривается применение определенного интеграла и в геометрических задачах- задачи на нахождение площади круга и объема тела вращения. Эти задачи выделены в отдельный параграф «Применение определенного интеграла в



6.75 Множество точек координатной плоскости xOy, удовлетворяющих уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a \neq b$), называют эллипсом.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной эллипсом:
а) $x^2 + 9y^2 = 9$ (рис. 167); б) $4x^2 + y^2 = 4$ (рис. 168).

Рис. 167

Рис. 168

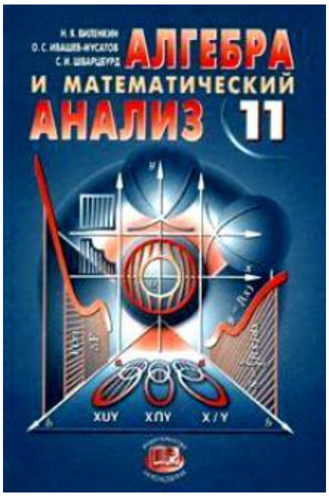
6.76 Какова формула для вычисления объема тела вращения?

6.77 Используя формулу объема тела вращения, получите формулы для вычисления объемов цилиндра и конуса.

6.78 Вычислите объем тела, полученного вращением кривой — графика функции $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, вокруг оси Ox.

6.79 Вычислите объем тела, полученного вращением кривой — графика функции $y = x^2$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, вокруг оси Oy.

6.80 К движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой сила $F = f(x)$, где x — координата движугеометрических и физических задачах» [4, с.196]. Автор учебника приводит небольшую систему упражнений, при чем не использует в практических задачах тех формул, которые были ранее выведены.



В учебнике Виленкина Н.Я «Алгебра и математический анализ» [5, с. 7-50] представляет собой продолжение книги «Алгебра и начала анализа» для 11 класса и предназначено как для общеобразовательной школы, так и классов и школ с углубленным изучением курса математики.

Определение интеграла как предела интегральных сумм «Совокупность всех первообразных функций f называют неопределенным интегралом» [5, с.8]. Автор рассматривает свойства интеграла, которые сопровождает доказательствами. Например, интеграл от суммы функций равен сумме интегралов слагаемых: $\int(\varphi(x)+\psi(x))dx=\int\varphi(x)dx+\int\psi(x)dx$. В самом деле , пусть $\int\varphi(x)dx=\Phi(x)+C$ и $\int\psi(x)dx=\Psi(x)+C$. Тогда $\Phi'(x)=\varphi(x), \Psi'(x)=\psi(x)$, и потому $\int(\varphi(x)+\psi(x))dx=\int(\Phi'(x)+\Psi'(x))dx=\int(\Phi(x)+\Psi(x))'dx=\Phi(x)+$ $+\Psi(x)+C=\int\varphi(x)dx+\int\psi(x)dx$ [4,с.9].

Моделирование многих процессов приводит к одной процедуре, результатом которой и является построение интеграла указанным способом. При таком определении интеграл появляется как закономерная необходимость. Непосредственное интегрирование основано на использовании результатов дифференцирования функции, в силу определения интеграла. Вводится таблица дифференциалов простейшей функции.

Функция	Производная	Дифференциал
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1}\,dx$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{dx}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{dx}{1+x^2}$

Автор приводит метод подстановки, в случае при вычислении интегралов, не содержащихся в таблице. В учебнике приводятся теоремы, которые приниматься как аксиомы. Рассказывает автор своему читателю, с какой целью необходимо изучение главы, с помощью пункта «Математическое моделирование» [5, с.28]. В учебнике даются задачи для самостоятельного решения учащимся различного уровня подготовки учащихся.

2. Интеграл как приращение первообразной.

Этот подход предполагает введение операции интегрирования как операции, обратной дифференцированию. При этом формула Ньютона – Лейбница, с помощью которой доказывается многие свойства интеграла. Однако в этом случае идея метода суммирования отходит на второй плане. Недостаток этого подхода состоит в том, что появляются затруднения при изучении приложений интеграл. В итоге, все равно приходится рассматривать интеграл как предел интегральных сумм, чтобы получить единый, достаточно общий метод решения задач геометрии, механики, электродинамики и других разделов физики. Это рассмотрение можно провести либо сразу после введения понятия интеграла, объяснив учащимся, что не всегда возможно найти первообразную данной функции, либо непосредственно при изучении приложений интеграла, рассмотрев этот метод на одной из задач.

В учебнике Алимова Ш.А. «Алгебра и начала анализа» [6, с. 287-310] перед введением понятия интеграла рассматривается задача о нахождении площади криволинейной трапеции, где вычисление площади сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$. Разность $F(b)-F(a)$ называют интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ [6, с. 293]. Автор рассматривает вычисление площади криволинейной трапеции с помощью интегральных сумм [6, с.296], говорит о том, что такой способ приближенного вычисления интеграла требует громоздких вычислений и им пользуются в тех случаях, когда не удается найти первообразную функции. В качестве примеров применения интеграла приведены задачи о вытекании воды из бака «цилиндрический бак, высота которого равна 5 м, а радиус основания равен 0,8 м, заполнен водой. За какое время вытечет вода из бака через круглое отверстие в дне бака, если радиус отверстия равен 0,1 м?» [6, с.308] и нахождении работы силы «Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для ее сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н» [6, с.309]. Задачи самостоятельного решения однотипны и их очень мало. Понятие интеграла является одним из основных в математике. Изучения этой темы завершает школьный курс математического анализа, знакомит учащихся с новым инструментом познания мира, а рассмотрение в школе применения интегрального исчисления в разных областях показывает учащимся значение и силу высшей математики.

Чтобы объяснить материал учащимся в доступной форме необходимо определить какой подход к введению понятия «интеграл» реализован в данном учебнике, и соответственно строить изучение темы. Так же можно сделать вывод, что прикладным задача уделяется достаточно мало внимания. Чаще всего это задачи, который раскрывает геометрический или физический смысл интеграла. В современных изданиях вводятся примеры применения интегрального исчисления при решение других задач. Они рассматриваются в качестве примера. Для самостоятельного решения таких задач нет. Таким образом, учителю необходимо самому подбирать прикладные задачи разного содержания в соответствии с определенным профилем обучения школьников.

Список литературы:

1. Алгебра и начала анализа: учеб.для 10-11 кл. сред.шк./ А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.;/ под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: Просвещение, 1990. – 320 с.

2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч. 1: учеб. Для общеобразоват. учереждений. – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2005.- 375с.

3. Башмакова М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб для 10-11 кл. сред.шк.-2-е изд.- М.: Просвещение, 1992.-351с.

4. Алгебра и начала анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни/ С.М.Никольского, М.К.Потапов, Н.Н. Решетников, А.В.Шевкин.- 8 – е изд.- М.:Просвещение, 2009.- 464 с.

5. Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики/ Н.Я Виленкина, О.С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.- 4-е изд.- М.:Просвещение, 1995.-288с.

6. Алгебра и начала анализ: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват.учереждений/ Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В. Сидоров – 15-е изд. – М.: Просвящение, 2007.- 384с.